Sea $\alpha = \angle ABF$

Como $\triangle ABF$ isósceles, $\angle ABF = \angle BAF = \alpha$

Por construcción, $\angle BAF = \angle FAD = \angle DAE = \alpha$

También $\triangle ADC, \triangle ADE$ son isósceles. Aplicándoles teorema coseno:

$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2AD\,AC \cos\alpha$. Como $DC = AD$, $AC^2 = 2AC\,AD \cdot \cos\alpha \Rightarrow AC = 2AD \cdot \cos\alpha$

$ED^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD\,AE \cdot \cos\alpha$. $AE = AD \Rightarrow AD^2 = 2AD \cdot AE \cdot \cos\alpha \Rightarrow AD = 2AE \cdot \cos\alpha$

Así que $AC = 4\cos^2\alpha \cdot AE$

Por otro lado, $\angle AFB = \pi - 2\alpha \Rightarrow \angle BFC = 2\alpha \Rightarrow FB = FC \cdot \cos 2\alpha = FC \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

por lo que $AC = AF + FC = FB + FC = FC(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + FC = 2FC \cdot \cos^2\alpha$

Así que $2FC \cdot \cos^2\alpha = 4AE \cdot \cos^2\alpha \Rightarrow \boxed{AE = \frac{FC}{2} = FM}$

Aplicando el teorema del coseno sobre $\triangle AFE$, tenemos

$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE\,AF \cdot \cos 2\alpha$. Sustituyendo $FA = FB = FC \cdot \cos 2\alpha$ y $AE = \frac{FC}{2}$ tenemos:

$EF^2 = \left(\frac{FC}{2}\right)^2 + (FC \cdot \cos 2\alpha)^2 - 2\,\frac{FC}{2}\,(FC \cdot \cos 2\alpha) \cdot \cos 2\alpha = \left(\frac{FC}{2}\right)^2 \Rightarrow EF = \frac{FC}{2} = AE$

Con lo que $\triangle AEF$ es isósceles, $\angle AFE = 2\alpha$, $\angle BFA + \angle AFE = (\pi - 2\alpha) + 2\alpha = \pi$

Así que <u>E, F, B están alineados</u> y $EB = AF + FM$

(A, M, X, E) es un paralelogramo, así que $EX \parallel AM$. Como $\angle MAD = \alpha = \angle ADE$,

AD corta EX en ángulos alternos-internos, así que $ED \parallel AM \Rightarrow ED \parallel EX$

Como ED, EX contienen $E \Rightarrow$ <u>E, D, X están alineados</u>, y $ED = EF$, $EX = EB$

Como $\triangle EBX, \triangle EFD$ son isósceles, $\angle DBX = \angle FXB$, y el punto de corte

$O = BD \cap FX$ estará en la bisectriz de $\angle BEX$

Como $\triangle MXB$ también es isósceles (ya que $MX = AE = FM = MB$),

M también pertenece a la bisectriz de $\angle BEX$

Así pues, M, O, E están alineados, y O es el punto de coincidencia de BD, FX, ME